Examen de Análisis Matemático I – Curso 1º - Grado en Física

1. Prueba, usando los teoremas de Bolzano y de Rolle, que la ecuación

$$3^x - x^3 - \frac{6}{5} = 0$$

tiene exactamente cuatro soluciones reales.

2. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x \operatorname{sen} x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{3 \operatorname{sen} x - 3x\ \cos x}{x^3}\right)^{1/x^2}$$

3. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

4. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y que tenga área máxima.

5. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $\log x = x^2 - 4x$.

6. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que:

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x).$$

¿Cuándo se da la igualdad?

7. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{6\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + x^2}{x^4} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x) \operatorname{arc\,tg} x}{\left(e^{x^2}-1\right) \operatorname{sen} x}$$

8. Determina un punto (u, v) $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$$

tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un triángulo de área mínima.

9. Justifica que la ecuación $\operatorname{sen} x + x^2 = \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

10. Dado $\alpha \in]0,1[$ demuestra que $x^\alpha \leqslant \alpha x + 1 - \alpha$ para todo $x > 0$. ¿Cuándo se da la igualdad?.

11. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{2\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - x}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{1/(1-\cos x)}$$

12. Calcula los límites siguientes.

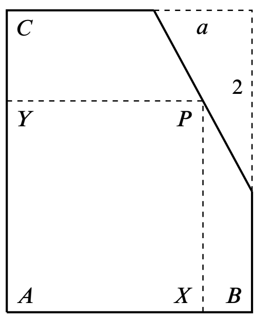
$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen} x^2)}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+2x)}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

13. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río abajo, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cómo debe hacerse el tendido entre la planta eléctrica y la fábrica para que su coste sea mínimo?.

14. La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto P sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices A, X, P, Y tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?



15. Estudia la convergencia de las series:

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(2n)!}, \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} n^3\,\mathrm{e}^{-n}$$

16. Calcula el límite siguiente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{2x}\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t\ -3x^2}{x^3}$$

17. a) Estudia el número de soluciones de la ecuación

$$4x-15\log x=0$$

en el intervalo $\mathbb{R}^+$. Explica con detalle tu razonamiento.

b) Calcula la siguiente integral:

$$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

18. Se construye un rectángulo con base en el eje de abscisas y vertices opuestos en la gráfica de la función $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$. Calcula los puntos de dicha gráfica para que el rectángulo así construido tenga área máxima.

19. Se desea construir un tanque cilíndrico sin tapa cuya superficie sea $K\pi$ metros cuadrados. ¿Qué relación debe existir entre el radio y la altura para que el volumen sea máximo? ¿Para qué valor de K el radio es 1 metro? Calcula el volumen máximo para $K=12$.

20. Calcula la longitud mínima del segmento que tiene sus extremos en los ejes de coordenadas y que pasa por el punto $(8, 1)$.

21. Calcula el perímetro máximo que puede tener un rectángulo que tiene un lado sobre el eje de abscisas y los extremos del lado opuesto están sobre la gráfica de la función $f(x)=4\operatorname{sen}(x)$ donde $x \in [0, \pi]$.

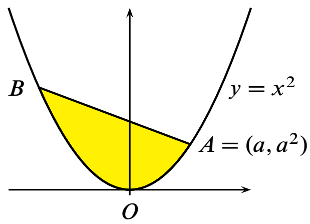
22. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \log(x) - x + 2$ para todo $x > 0$.

    a) Probar que f alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}^+$.

    b) Calcular todos los valores que toma dicha función, o sea $f(\mathbb{R}^+)$.

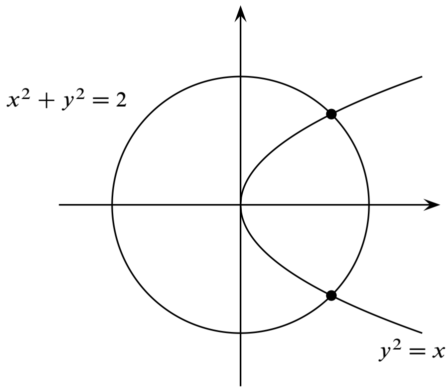
    c) Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}^+$ y localizarlas.

23. Calcula $a > 0$ por la condición de que el sector parabólico OAB de la figura de la derecha tenga área mínima. El punto B es la intersección de la parábola $y = x^2$ con su normal en el punto $A = (a, a^2)$.



24.

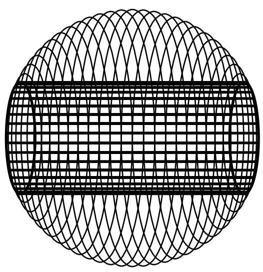
    a) Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 2$.

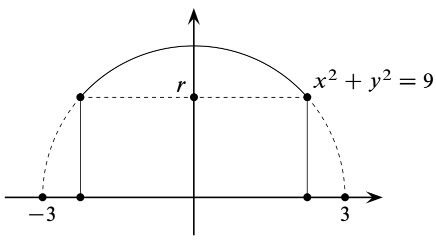


25. a) Calcula, por el método de los discos o arandelas y por el método de las láminas o capas, el volumen de una esfera de radio 3 en la que, siguiendo un diámetro, se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $r < 3$.

    b) Calcula el área de la superficie total del solido obtenido.

    c) Calcula el valor máximo absoluto de dicha área.

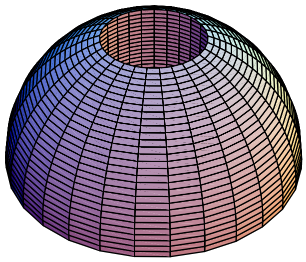


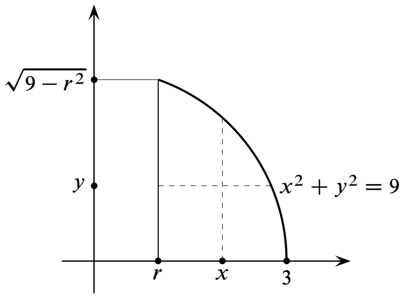


26. Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ alrededor del eje OY. Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r centrado en el eje de revolución.

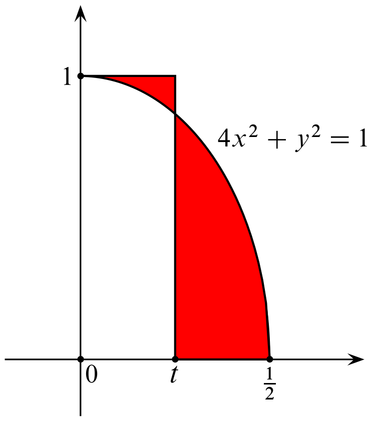
    a) Calcula por el método de las láminas o capas y de los discos el volumen del sólido resultante.

    b) Calcula el área de la superficie lateral total de dicho sólido (no se considera la base). Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.





27. Sea $A(t)$ el área de la región del plano (sombreada en gris en la figura) comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2+y^2=1$, la recta horizontal $y=1$ y la recta vertical $x=t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Se pide calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0,1/2]$.



Granada, 9 de febrero de 2011